

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Wettinerstraße 17, zu richten.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen als die genannte zu den Herstellungskosten.

Dieser Band des Jahresberichts erscheint in zwei Teilen. Der vorliegende zweite Teil, Heft 7-13 umfassend, kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, M. 20.80, für Nichtmitglieder M. 25.—. Die Lieferung ins Ausland erfolgt gemäß der Verkaufsordnung des Börsenvereins der deutschen Buchhändler mit einem Abschlag von ca. 60% gegenüber dem Normalkurs. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Z. etwa 800 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt von 1931 ab 25 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 300 Mark abgelöst werden. Beitrittsanträge nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. L. Bieberbach, Frankfurt a. M., Schumannstraße 28, oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bzw. der Jahresbeitrag ist an die Deutsche Mathematiker-Vereinigung Postscheckkonto 54128 beim Postscheckamt Leipzig einzusenden.

Anzeigenpreise: 1/4 Seite M. 400.—, 1/2 Seite M. 230.—, 3/4 Seite M. 125.—, die zweigespaltene Millimeterzeile M. 1.25. Anzeigenannahme durch B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

1. Abteilung.

	Seite
Über den Richtungssinn und seine Verallgemeinerung. Von HEINRICH TIEZT in Erlangen. (Schluß)	113
Die Verwendung der Koinzidenzebene zur Lösung von Aufgaben der darstellenden Geometrie. Von ALFRED BARUCH in Berlin. (Mit 7 Figuren im Text)	123
Zur Biographie Johann Bolyais. Von SIGBERT WIESNER in Wien	130
Die relative und absolute Bewegung bei Huygens. Von J. A. SCHOUTEN in Delft. (Mit 3 Figuren im Text)	136
Beispiele für Gleichungen ohne Affekt. Von I. SCHUR in Berlin	145
Über einige Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisel. Von R. GRAMMEL in Stuttgart	150
Über das Potential dreifach belegter Flächen. Von A. WANGERIN in Halle a. S.	174
Über die Cassinischen Kurven. Von J. THOMAS in Jena. (Mit 3 Figuren im Text)	185
Jan Versluys. Von L. SCHLESINGER in Gießen	236
Über einen Satz des Herrn Rosenblatt. Von EDMUND LANDAU in Göttingen	238
Neuer Beweis eines Satzes von Herrn Valiron. Von EDMUND LANDAU in Göttingen	239
Berichtigung zu meiner Arbeit „Über die paraboloidischen Flächen. 2. Mitteilung.“ Von P. FRANCK in Hamburg	240

2. Abteilung.

Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung	41
Neuheimer Versammlung vom 20. bis 24. September 1920. Göttinger Versammlung am 6. und 7. Januar 1921. Kassenbericht. Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Juli-Dezember 1920. Reichsverband deutscher mathematischer Gesellschaften und Vereine. Euler-Kommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft.	43
Mitteilungen und Nachrichten	43
Akademien, Gesellschaften, Vereinigungen, Versammlungen. — Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften. — Hochschulschriften. — Personalschriften.	43
Literarisches. Besprechungen	43

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.



NEUNUNDZWANZIGSTER BAND

MIT 13 FIGUREN IM TEXT



VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1920

成大圖書館



Inhalt.

1. Abteilung.

Berichte, Vorträge und Abhandlungen.

	Seite
Baruch, A., in Berlin. Die Verwendung der Koinzidenzebene zur Lösung von Aufgaben der darstellenden Geometrie. (Mit 7 Figuren im Text)	123
Bernstein, F., in Göttingen. Berichtigung zu der Arbeit: Die Übereinstimmung derjenigen beiden Sammlungsverfahren, welche von P. J. Stieltjes und E. Borel herrühren	94
Frank, P., in Hamburg. Die paraboloidischen Flächen und ihre Lieschen Paraboloido.	75
— Berichtigung zu meiner Arbeit „Über die paraboloidischen Flächen. 2. Mitteilung“	240
Grammel, R., in Stuttgart. Über einige Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels	150
Jonas, H., in Berlin. Über die Konstruktion der W-Kongruenzen zu einem gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der R-Flächen	40
Kommerell, K., in Stuttgart. Über nichtaffine Raumkollineationen	1
Landau, Edmund, in Göttingen. Über einen Satz des Herrn Rosenblatt	238
— Neuer Beweis eines Satzes von Herrn Vallron	239
Schlesinger, L., in Gießen. Ein Beitrag zur Lebensbeschreibung von L. Fuchs	28
— Jan Versluys	236
Schouten, J. A., in Delft. Die relative und absolute Bewegung bei Huygens. (Mit 3 Figuren im Text)	136
Schur, I., in Berlin. Beispiele für Gleichungen ohne Affekt.	145
Thomae, J., in Jena. Über die Cassinischen Kurven (Mit 3 Figuren im Text)	185
Tietze, H., in Erlangen. Über den Richtungssinn und seine Verallgemeinerung	95
Wangerin, A., in Halle a. S. Über das Potential dreifach belegter Flächen.	174
Wiesner, S., in Wien. Zur Biographie Johann Bolyais	130

2. Abteilung.

Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

	Seite		Seite
Ausschuß der Deutschen Mathematiker-Vereinigung für das Jahr 1919/20.	1	Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung	30. 51
Kommissionen	1	Erklärung des Ausschusses der Deutschen Mathematiker-Vereinigung	31
Verzeichnis der Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung nach dem Stande vom 1. Mai 1920	2	Nauheimer Versammlung vom 20. bis 24. September 1920	41
Verstorbene Mitglieder	25	Göttinger Versammlung am 6. und 7. Januar 1921	47
Verzeichnis der Vorsitzenden und der Versammlungsorte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung seit ihrer Begründung	25	Kassenbericht nach dem Stande vom 1. Dezember 1920	50
Kassenbericht nach dem Stande vom 1. Dezember 1919	26	Reichsverband deutscher mathematischer Gesellschaften und Vereine	52
Einladung zur 86. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte, Bad Nauheim, vom 19. bis 25. September 1920	27	Euler-Kommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft	52

Mitteilungen und Nachrichten.

Akademien, Gesellschaften, Vereinigungen. Versammlungen.	Seite		Seite
Berliner Mathematische Gesellschaft	31. 53	Mathematische Gesellschaft in Göttingen	54
Mathematische Sektion der Gesellschaft Isis in Dresden	54	Mathematisches Kränzchen in Hamburg	32. 56
Mathematisches Kolloquium zu Frankfurt a. M.	32. 54	Mathematisches Kränzchen in Prag	32
		Mathematische Gesellschaft in Wien	33. 56
		Griechische Mathematische Gesellschaft	56
		Union internationale de mathématiciens	33

Preisaufgaben und gekrönte Preis- schriften.	Seite	Hochschulschriften.	Seite
Bekanntmachung der Gesellschaft der Wissen- schaften zu Göttingen vom 1. September 1920 (Wolfskehl-Preis)	57	Mathematisches Seminar der Universität Ham- burg	33
Preisaufgaben der Académie Royale de Bel- gique für 1921	57	Verzeichnis der für das Sommerhalbjahr 1920 angekündigten mathematischen Vorlesungen	34
Alfred Ackermann-Taubner-Gedächtnispreis	57	Verzeichnis der für das Winterhalbjahr 1920/21 angekündigten mathematischen Vorlesungen	57
Mathematischer Preis der Italienischen Ge- sellschaft der Wissenschaften für 1920	57	Personalnachrichten	56, 60

Literarisches.

Besprechungen.	Seite		Seite
Abraham, M., Theorie der Elektrizität. Bd. I: Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität. (L. Bieberbach)	38	Love, A. E. H., Theoretische Mechanik. Eine einleitende Abhandlung über die Prinzipien der Mechanik. Mit erläuternden Beispielen und zahlreichen Übungsaufgaben. Autori- sierte deutsche Übersetzung der zweiten Auflage von Hans Polster. (G.)	64
Ahrens, W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele. 2., vermehrte und verbesserte Auflage. Bd. II. (Bieberbach)	62	Scheffers, G., Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik. (L. Bieberbach)	39
Beck, H., Koordinatengeometrie. Bd. I: Die Ebene. (Bieberbach)	63	Schneider, H., Metaphysik als exakte Wissen- schaft. Heft I: Gegebenheitslehre. Heft II: Gegliederteitslehre. (W. Blaschke)	63
Borel, E., Die Elemente der Mathematik. Deutsche Ausgabe von P. Staackel. Bd. I. 2. Aufl. Bd. II. 2. Aufl. (Bieberbach)	62	Schürer, F., Integraldifferenzen- und Diffe- rentialdifferenzengleichungen. (E. Hilb)	39
Kowalewski, G., Differential- und Integral- rechnung. 2. Aufl. (Bieberbach)	62		

kommen einschließlich der Deformationen alle möglichen (im ganzen sechs) Vertauschungen der Linienstücke als Abbildungen der Umgebungen der Würfecke in Frage, und die zugehörige Signaturengruppe umfaßt sechs verschiedene Signaturen. Ihnen entsprechen auch sechs wesentlich verschiedene Formen einer Indikatrix, s. Anm. 19). Als Indikatrix könnte man dabei drei mit Nummern versehene von der betreffenden Ecke ausgehende Strecken (Stücke der Kanten) verwenden. — Ein anderes Beispiel ist in Anm. 28) enthalten.

25) Selbstverständlich können nur Umgebungen von Punkten, die von derselben Art sind, aufeinander abgebildet werden, und wir können uns noch weiter darauf beschränken, nur die Umgebungen solcher Punkte aufeinander abzubilden, die — kurz gesagt — mit ihren Umgebungen auf dem Gebilde stetig ineinander übergeführt werden können, — auf „Deformationsbereiche“, wie wir es nennen wollen. So bilden z. B. bei einer (abgeschlossenen) Kreisringfläche die Punkte im Inneren der Fläche, dann die Punkte jeder Kreisperipherie für sich einen Deformationsbereich, deren es im ganzen also drei gibt. Genauer gesagt wird man aus der Gesamtheit der Umgebungen aller Punkte durch Einführung von Limes- (oder Umgebungs-, oder Entfernungs-)beziehungen für die Umgebungen (gleicher Art) ein topologisches Gebilde gewinnen und die Deformationsbereiche definieren als die zusammenhängenden Teilmengen dieses aus allen Umgebungen bestehenden Gebildes.

26) D. h. soviel als die Frage, ob irgendeine als „Indikatrix“ verwendete Figur auf einem Weg auf der Fläche aus einer Form in eine wesentlich verschiedene Form übergeführt werden kann: Die verschiedenen Indikatrixformen stellen uns aber nichts anderes dar als verschiedene Klassen von Abbildungen der Umgebungen eines festgehaltenen Punktes.

27) Z. B. ist beim Möbiusschen Band der aus den inneren Punkten der Fläche bestehende Bereich nicht orientierbar, die Randlinie aber orientierbar. Über Deformationsbereiche vgl. Anm. 25).

28) Man betrachte etwa den aus Punkten der Kreislinie C bestehenden Deformationsbereich des Gebildes $C_r^{(m)}$, das im Anhang (Nr. 3) erklärt und bei gegebenem $a > b > 0$ und ganzzahligem m mittels cartesischer Koordinaten x, y, z durch $0 \leq \varphi \leq b$, $\psi = (2\pi + \nu\varphi) : m$ für $0 \leq k \leq m-1$, $r = a + \varphi \cos \psi$, $z = \varphi \sin \psi$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ dargestellt werden kann, hierbei $m > 2$ vorausgesetzt. Für die Umgebungen eines Punktes von C hat man $2\mu = 2m!$ verschiedene Klassen von Abbildungen bzw. Indikatrixformen. Im Falle $\nu = 0$ (oder $\nu \equiv 0$, mod. m) bleiben diese auch bei einem Umlauf längs C erhalten, und es ist also der Bereich orientierbar. Falls aber der größte gemeinsame Teiler t von m und ν kleiner als m ist, hängen je m/t Kategorien miteinander zusammen, und die m/t Signaturen der mit der identischen Abbildung zusammenhängenden Klassen bilden eine Untergruppe der ganzen Signaturengruppe vom Index m/t , die Signaturen jeder anderen Gesamtheit zusammenhängender Klassen bilden „Nebengruppen“ dieser Untergruppe. Den verschiedenen Werten $t (< m)$ entsprechen die Abstufungen der Nicht-Orientierbarkeit. — Eine leichte Verallgemeinerung gegenüber diesem Beispiel erhält man aus einer $m (> 2)$ -blättrigen Riemannschen Fläche in der Umgebung eines etwa in $z = x + iy = 0$ liegenden Windungspunktes, für dessen Umkreisen irgendeine Substitution der m Blätter gegeben sei, wenn man nur die Punkte $|z| \leq \rho$ beibehält und längs $|z| = \rho$ durchwegs die übereinanderliegenden m Punkte miteinander vereinigt, so daß alle Blätter in der einen Linie $|z| = \rho$ zusammenstoßen.

29) Vgl. Anm. 19), 23), sowie 2), 3), 24).

30) E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, Vorwort S. IX. Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung. XXIX. 1. Abt. Heft 7/12. 8

Anhang über Orientierung und über Lagerung von Flächen im Raume.

1. Orientierbar und zweiseitig, „Seite an einer Stelle“ und „Seite einer Fläche als Ganzes“. Ein Fragenkreis, der im Vortrag nicht zur Sprache gebracht werden konnte, scheint mir für die Beziehungen des Gegenstandes zu den sonst üblichen Behandlungen des Begriffes „Orientierung“ von Wichtigkeit und sei darum anhangsweise gestreift.

Sei wieder an das Beispiel eines Möbiusschen Bandes angeknüpft, einer Fläche, die wir nun betrachten wollen in ihrer Beziehung zum dreidimensionalen (gewöhnlichen Euklidischen) Raum, in dem sie sich befindet. An einer Stelle des Bandes (und zwar einer im Inneren, nicht auf der Randlinie der Fläche befindlichen Stelle) können wir einen auf der Fläche senkrechten Halbstrahl, eine Flächennormale, auf zwei Arten errichten: nach der einen oder anderen „Seite“, die man „an der betreffenden Stelle“ der Fläche im Raum unterscheiden kann. Wenn wir den Punkt samt einer solchen Normale längs des Bandes stetig verschieben, können wir erreichen, daß der Punkt in die Ausgangslage zurückkehrt, die Normale aber in die entgegengesetzte Richtung wie vorher übergegangen ist: Die Fläche hat „als Ganzes nur eine Seite“, hierin abweichend von einer im Raum gelegenen Ebene (wir meinen natürlich eine reelle Ebene mit nur eigentlichen Punkten) oder Kugelfläche, bei der so etwas nicht passieren kann, — die „als Ganzes zwei Seiten“ haben.

Das trifft sich nun damit, daß die letztgenannten Flächen orientierbar sind, das Möbiussche Band aber nicht. Es ist aber schon wiederholt darauf hingewiesen worden^{a)}, daß es sich bei der erwähnten Eigenschaft der „Zweiseitigkeit“ oder „Einseitigkeit“ um eine *relative Eigenschaft der Fläche in bezug auf den umgebenden Raum* handelt, während die „Orientierbarkeit“ oder „Nichtorientierbarkeit“ eine der Fläche an sich zukommende *absolute Eigenschaft* ist^{b)}, ferner darauf, daß z. B. eine (reelle) Gerade, wenn man aus ihr durch Hinzunahme eines „un-eigentlichen Punktes“ eine als geschlossen anzusehende Linie herstellt hat, mitunter die relative Eigenschaft der Zweiseitigkeit, mitunter jene der Einseitigkeit in bezug auf einen die Gerade enthaltenden (projektiven reellen) Raum aufweisen kann, u. zw. je nachdem ob dieser

a) Siehe eine Bemerkung von Dyck, Math. Ann. 32 (1888) S. 474 und insbesondere Steinitz, Sitz. ber. der Berliner Math. Ges. 7. Jahrg. S. 35 im Arch. d. Math. u. Phys. (3) 13 (1908); vgl. auch Dénes König, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 19, S. 215.

b) Die Unterscheidung topologischer Eigenschaften in „absolute“ und „relative“ rührt von F. Klein her (Math. Ann. 9 (1876) S. 478).

Raum von ungerader oder von gerader Dimension ist, — unbeschadet der allemal vorhandenen Orientierbarkeit der Geraden (vgl. Nr. 5); usw.

2. Andeutung einer allgemeineren Auffassung. Wie bezüglich der Orientierbarkeit ist aber auch bezüglich der erwähnten relativen Eigenschaft eine allgemeinere Auffassung möglich. Sei also R irgendein topologischer Raum und P eine Teilmenge seiner Elemente (womit auch für die Elemente von P Umgebungsbeziehungen gegeben sind, d. h. womit P selbst gleichfalls als ein topologischer Raum erscheint^{c)}). Sei etwa, um einen anschaulichen Fall vor Augen zu haben, P eine Fläche im dreidimensionalen Raum R . Man könnte dann zunächst, gewissermaßen als Vorschule für später, solche topologische Abbildungen des Raumes R auf sich selbst betrachten, bei denen auch die Fläche P auf sich selbst abgebildet wird, wie dies z. B., wenn P eine Kugelfläche ist, bei einer Drehung des Raumes um eine durch den Mittelpunkt gehende Achse der Fall wäre, oder auch bei einer Spiegelung des Raumes an einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene. Man könnte die Gesamtheit (den „Raum“) dieser Abbildungen betrachten und in Klassen einteilen mit Untersuchung zugehöriger Signaturen und Indikatoren. In dieser eine Gruppe G bildenden Gesamtheit bilden dann alle jene Abbildungen α eine ausgezeichnete Untergruppe H , für welche die in der Abbildung α enthaltene Abbildung von P auf sich selbst eine Deformation ist. In H wieder ist als ausgezeichnete Untergruppe K die Gesamtheit aller in G vorkommenden Deformationen des Raumes R enthalten.

Nunmehr wären nach diesem methodischen Vorbild wieder Umgebungen zu betrachten, und zwar für irgendeinen Punkt P seine „räumlichen Umgebungen“ und die in ihnen enthaltenen „Flächenumgebungen“. Zu untersuchen sind dann solche Abbildungen räumlicher Umgebungen des Punktes, bei denen auch die inliegenden Flächenumgebungen einander entsprechen, hierauf die Aufteilung dieser Abbildungen in Kategorien, bezüglich Signaturen und Indikatoren. Bei jeder dieser Abbildungen — sie bilden eine Gruppe, die g heiße — können wir nun unser Augenmerk auf die in ihr enthaltene Abbildung der Flächenumgebungen des Punktes richten und prüfen, ob wir in ihr eine „Deformation“ der Flächenumgebung (in dem im vorangestellten Vortrag eingeführten Sinne) vor uns haben. Alle jene Abbildungen (der räumlichen Umgebungen), bei denen dies der Fall ist, bilden dann eine ausgezeichnete Untergruppe h von g . In h wieder ist als ausgezeichnete Untergruppe k die Gesamtheit aller in

c) Vgl. z. B. Hausdorff, a. a. O., S. 240 ff.

116

g vorkommenden Deformationen enthalten. Die weiteren Überlegungen sind dann bedingt durch die Feststellung (die übrigens in allen Fällen einleuchtet, wo man eine Umgebung des Punktes A in R durch eine „Multiplikation“ in Steinitz'schen Sinn^{d)} erhalten kann, bei der ein Faktor eine Umgebung von A in P ist), daß eine ausgezeichnete h enthaltende Untergruppe l von g vorhanden ist, so daß die Faktorgruppen g/l und h/k übereinstimmen, und dabei k' in l' , k'' in l'' usw. enthalten ist, wenn $h = k + k' + k'' + \dots$ und $g = l + l' + l'' + \dots$ die bezüglichen Zerlegungen in „Nebengruppen“ sind. Die einzelnen Elemente der Faktorgruppe h/k bzw. die zugehörige Aufteilung von h in Klassen ergeben dann im allgemeinen Falle das, was den zwei verschiedenen „Seiten an einer Stelle“ einer Fläche im Raume entspricht.

spricht. Geht man nun dazu über, Umgebungen nicht nur eines und des selben Punktes sondern verschiedener Punkte aufeinander abzubilden (wobei natürlich ein dem früheren Artbegriff analoger Relativbegriff eine Rolle spielt und nur Punkte gleicher relativer Art der Umgebung und im besonderen nur Punkte eines und desselben relativen Deformationsbereiches in Frage kommen), so besteht die Möglichkeit, daß Abbildungen verschiedener Klassen von g (worunter wir k und seine „Nebengruppen“ in g verstehen) in dem so erweiterten Raum von Abbildungen miteinander zusammenhängen. Bestehen solche Zusammenhänge für zwei Abbildungen nur dann, wenn sie entweder beide in l oder beide in derselben Nebengruppe $l', l'', \dots$ stehen, so liegt der Fall vor, der der Unterscheidung von „zwei Seiten einer Fläche als Ganzes“ entspricht. Also: Erhaltung der für die Umgebung eines Punktes von P aufgestellten Seitenunterscheidung im ganzen Deformationsbereich B , — bzw. für die Fläche P als Ganzes, falls diese „homogen und homogen gelagert“ ist, d. h. einen einzigen relativen Deformationsbereich bildet. Liegt dieser Fall vor, so wollen wir — nur um einen Ausdruck zu haben und ohne einer zu bildenden Terminologie vorgreifen zu wollen — etwa von „einheitlicher“ oder „invarianter Lagerung“ von B (bzw. von P) in R sprechen. Im gegenteiligen Fall, der aber offenbar verschiedener Abstufungen fähig sein kann hinsichtlich derjenigen $l', l'', \dots$, mit denen l in Zusammenhang steht, haben wir die Verallgemeinerung des Beispiels der einseitig im Raum liegenden Fläche

d) E. Steinitz, a. a. O., S. 42. Die genannte Multiplikation zweier Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — mit der das von M. Fréchet, Math. Ann. 68 (1909) S. 14¹ angewendete durch das Symbol $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ bezeichnete Verfahren gleichwertig ist — betrifft die Herstellung einer ganzen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$, während es sich im Text um das Analogon hiezu bei Arten von Umgebungen handelt.

3. Ein Beispiel. Auf eine Ausdehnung dieser Betrachtungen auf den Fall mehrerer in einem Raum R gelegener Gebilde $P, P' \dots$ hinsichtlich der relativen Lagerung des Durchschnittsgebildes gleichzeitig bezüglich R und aller $P, P', \dots$ sei nicht weiter eingegangen und nur für das Bisherige ein Beispiel gegeben, das ein wenig die große Fülle der vorhandenen Möglichkeiten erkennen läßt. Es werde die aus den m Verbindungsstrecken s der Ecken eines regelmäßigen m -Ecks mit dessen Mittelpunkt M bestehende sternförmige Figur S betrachtet. In derselben Ebene mit S wählen wir eine S nicht treffende Gerade a als Achse, um die wir S rotieren lassen. M beschreibt dann eine Kreislinie C , die Strecken s aber handartige krumme Flächen, die längs C aneinander geheftet sind. Die (abgeschlossene) Menge aller Punkte auf C und diesen m „Blättern“ heiße $Q^{(m)}_0$. Etwas allgemeinere Gebilde $Q^{(m)}_\nu$ erhält man, wenn man, gleichzeitig mit der Rotation von M um unsere Achse, die Figur S in ihrer jeweiligen Ebene sich um M so drehen läßt, daß nach Durchführung der vollen Drehung um a , sich S gerade um ν/m eine Volldrehung um M gedreht hat, die erste Strecke s also in die Lage der $(\nu + 1)$ -sten vor der Drehung gelangt. Sei $Q^{(m)}_\nu$ unser Raum R und C unsere Teilmenge P . Da alle Punkte von $P = C$ gleichartige Umgebungen bezüglich P und R haben, ist P homogen und homogen gelagert und bildet einen einzigen relativen Deformationsbereich. Für jeden Punkt A von C zerfällt die Gruppe g in $2m! = 2\mu$ Klassen $\pi_i, \sigma_i (i = 0, 1, \dots, \mu - 1)$, wobei die μ verschiedenen π_i bzw. σ_i den verschiedenen Permutationen der Blätter entsprechen und bei den π_i die Richtung des durch A gehenden Linienstückes von C erhalten bleibe, bei den σ_i umgekehrt werde. Dabei mögen π_i, σ_i für jedes i derselben Permutation der Blätter entsprechen, im besonderen π_0 und σ_0 der identischen. Dann ist $\pi_0 = k$ die Klasse der Deformationen, $h = \pi_0 \pi_1 + \dots + \pi_{\mu-1} = k + k' + \dots + k^{(\mu-1)}$, $l = \pi_0 + \sigma_0$, $l^{(n)} = \pi_i + \sigma_i$, $h/k = g/l =$ der symmetrischen Permutationsgruppe von m Elementen. Im Falle $\nu = 0$ d. i. für $Q^{(m)}_0$ zeigt die Betrachtung eines Umlaufes längs C , daß alle Klassen von g getrennt bleiben, also einheitliche Lagerung vorliegt. Im Falle $1 \leq \nu \leq m - 1$ dagegen hängen verschiedene Klassen von g miteinander zusammen, und zwar zu je m/t , wenn t der größte gemeinsame Teiler von m und ν ist. Je nach dem Wert von m/t gibt es also verschiedene Abstufungen nicht-einheitlicher Lagerung.

Die Mannigfaltigkeit der vorhandenen Möglichkeiten träte noch deutlicher hervor, wenn man, wie soeben nach der ganzen Ausdehnung einer Linie mehrere flächenhafte Blätter, so nach der ganzen Ausdeh-